Cours du 22.03.2021 - MATIN

lundi, 22 mars 2021 10:13

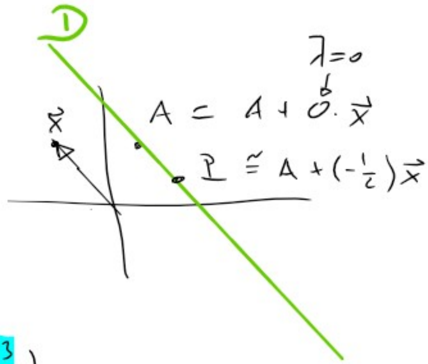
DATE DE L'EXAMEN !

Date prévue le 26 Avril 2021 !

CHAMP : vecteurs et les matrices

Equations paramétriques d'une droite :

(ex 2 série 14)



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \vec{OA} + \lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ 3 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} P_1 = 1 - 3\lambda \\ P_2 = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{Système d'équations Paramétriques de la Droite D} \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$$

$$P_1 - 1 = -3\lambda \Rightarrow \frac{P_1 - 1}{-3} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1 - P_1}{3}$$

Δ aux signes!

Equation cartésienne : isolons λ sur chaque équation

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1 - P_1}{3} \\ \lambda = \dfrac{P_2 - 3}{2} \end{cases} \Rightarrow -\lambda + \lambda = 0$$

$$-\frac{1 - P_1}{3} + \frac{P_2 - 3}{2} = 0$$

$$\frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \frac{11}{6} = 0 \quad \text{Equ. Cartésienne De la droite D.}}$$

$$p_2 = \alpha \cdot p_1 + \beta$$

$\times 6$

$$2 \cdot p_1 + 3 p_2 - 11 = 0$$

⚠ il y a une INFINITÉ d'équ. cartésiennes et une infinité de syst. d'équ. param. pour une même droite !

A est-il sur la droite ? $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}(1) + \frac{1}{2}(3) - \frac{11}{6} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{11}{6} = \frac{2+9-11}{6} = 0 \,!$$

$\Downarrow$

A est sur la droite

$\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$ est-il sur la droite ? OUI !

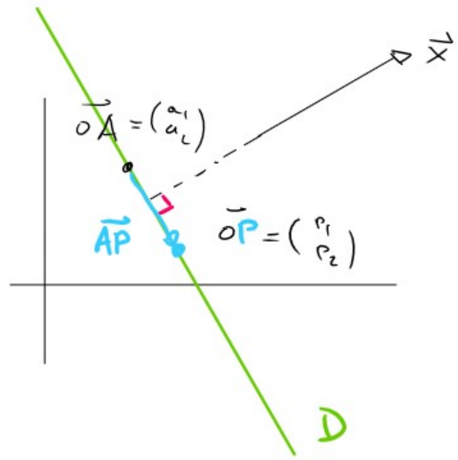
$$2 \cdot (0{,}25) + 3 \cdot (3{,}5) - 11 = 0{,}5 + 10{,}5 - 11 = 0 \,//$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}75 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot (0{,}5) + 3 \cdot (2{,}75) = 1 + 8{,}25 - 11 = -1{,}75 \neq 0$$

$\Rightarrow$ NON le second point n'est PAS sur la droite car il ne vérifie pas l'équation cartésienne de la droite D !!!!!

Cet exemple illustre l'équation d'une droite SACHANT un point sur la droite ET un vecteur directeur.

En 2D, si on a un vecteur quelconque, il n'y a qu'une seule DIRECTION qui est PERPENDICULAIRE au vecteur !



$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\Rightarrow \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

$\vec{x}$ Est PERPENDICULAIRE à la droite D.

$$\vec{AP} \perp \vec{x} \qquad \langle \vec{AP}, \vec{x} \rangle = \vec{0}$$

Si on connaît un vecteur PERPENDICULAIRE à la droite et 1 point sur la droite, on peut écrire

$$\langle \vec{OP} - \vec{OA}, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\langle \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle = (p_1 - a_1)x_1 + (p_2 - a_2)x_2 = 0$$

CONNU!

$$\boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 - (a_1 x_1 + a_2 x_2) = 0}$$

Equation Cartésienne de D !

En 3D :

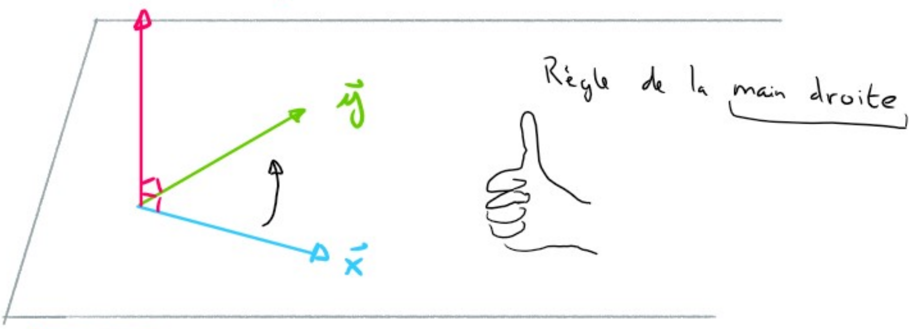
Nouvel opération : PRODUIT VECTORIEL (il n'a pas de sens en 2D !!!!)

$$\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\boxed{\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}}$$

$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$



Règle de la main droite

$$\boxed{\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}}$$

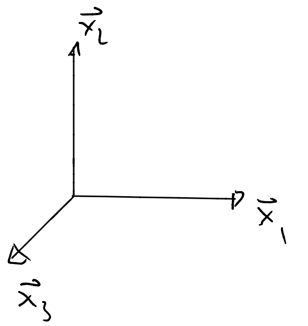
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}' = \vec{y} \wedge \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = -\vec{z}$$

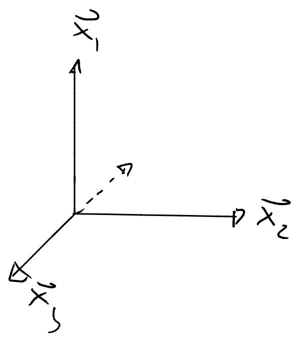
Rappel : si on a 3 vecteurs perpendiculaires de norme 1, on a une base "ORTHONORMEE" de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{x}_2$ $\qquad$ $\vec{x}_1$



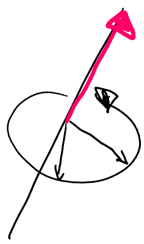
$$\vec{x}_3 = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2$$

BASE DIRECTE !
Elle respecte le sens du produit
Vectoriel !



$$\vec{x}_3 = - \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2$$

BASE INDIRECTE
L'ordre des vecteurs de la base
Est dans le sens INVERSE du
produit vectoriel



Exercice : prouvez que dans le cas général

$$\underbrace{\vec{x} \wedge \vec{y}}_{\triangle} = \underbrace{-\vec{y} \wedge \vec{x}}_{\square}$$

$$\triangle = \dots = \dots = [\dots]$$

$$\square = \dots = \dots = [\dots]$$

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$-\vec{y} \wedge \vec{x} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} -y_2 x_3 - (-y_3) x_2 \\ -y_3 x_1 - (-y_1 x_3) \\ -y_1 x_2 - (-y_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 y_2 + x_2 y_3 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ -x_1 y \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ldots \\ -y_3 x_1 - (-y_1 x_3) \\ -y_1 x_2 - (-y_2 x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ -x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{pmatrix}$$

développé "–"

inversé x et y

Donc on a bien prouvé que $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$ CQFD !